I 解答例

1.
$$Z(\beta, V) = (1 + e^{-\beta\varepsilon})^{(V/v)}$$

2.
$$F(\beta, V) = -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta, N) = -\frac{1}{\beta}\frac{V}{v}\ln(1 + e^{-\beta\varepsilon})$$
$$P(\beta, V) = -\frac{\partial F(\beta, V)}{\partial V} = \frac{1}{\beta v}\ln(1 + e^{-\beta\varepsilon})$$

3.
$$\langle E\rangle_T^{\mathrm{C}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta, N) = \frac{V}{v}\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} + 1}$$

4.
$$C(T, V) = \frac{\partial\langle E\rangle_T^{\mathrm{C}}}{\partial T} = \frac{V}{v}\frac{\varepsilon^2}{kT^2}\frac{e^{\varepsilon/kT}}{(e^{\varepsilon/kT} + 1)^2} \approx \frac{V}{v}\frac{\varepsilon^2}{kT^2}e^{-\varepsilon/kT}\ (kT \ll \varepsilon)$$

5.
$$\Xi(\beta, V, \mu) = \left\{e^{-\beta zJ\langle n\rangle^2/2}\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon - zJ\langle n\rangle - \mu)}\right)\right\}^{V/v}$$

6.
$$\langle N\rangle_{\beta,\mu}^{\mathrm{GC}} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\Xi(\beta, V, \mu) = \frac{V}{v}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - zJ\langle n\rangle - \mu)} + 1}$$
$$P(\beta, V, \mu) = -\frac{\partial\mathcal{J}(\beta, V, \mu)}{\partial V} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln\Xi(\beta, V, \mu) = -\frac{zJ}{2v}\langle n\rangle^2 + \frac{1}{\beta v}\ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon - zJ\langle n\rangle - \mu)}\right)$$

7.
$$\langle n\rangle = \frac{\langle N\rangle_{\beta,\mu}^{\mathrm{GC}}}{V/v} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - zJ\langle n\rangle - \mu)} + 1}$$

これを用いて μ を消去すると

$$P(\beta, V, \langle n\rangle) = \frac{zJ}{v}\left\{-\frac{\langle n\rangle^2}{2} + \frac{1}{\beta zJ}\ln\frac{1}{1 - \langle n\rangle}\right\}$$

8.
$$\frac{\partial P(\beta, V, \langle n\rangle)}{\partial\langle n\rangle} = \frac{zJ}{v}\left(-\langle n\rangle + \frac{1}{\beta zJ}\frac{1}{1 - \langle n\rangle}\right) = \frac{zJ}{v}\frac{1}{1 - \langle n\rangle}\left\{\left(\langle n\rangle - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta zJ} - \frac{1}{4}\right)\right\}$$

$\beta zJ < 4$ ならば $\partial P/\partial\langle n\rangle > 0$ で P は単調増加，$\beta zJ > 4$ ならば，$\partial P/\partial\langle n\rangle < 0$ の領域が現れる。
よって $\beta_{\mathrm{c}} = 4/zJ$，$T_{\mathrm{c}} = zJ/4k$

II

A. 略解

1. $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$

2. $\psi(x), \psi'(x)$ が $x = \pm a$ で連続であること。束縛状態があるとき，$\psi(x \to \pm\infty) = 0$。

3. x の小さい方から領域を I,II,III と分けると，$\psi(x)$ が束縛状態だから $E < 0$ に注意して

$$\psi_I(x) = Ae^{\kappa x} \tag{1}$$
$$\psi_{II}(x) = C\sin(kx) + D\cos(kx) \tag{2}$$
$$\psi_{III}(x) = Be^{-\kappa x} \tag{3}$$
$$\kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \tag{4}$$
$$k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} \tag{5}$$

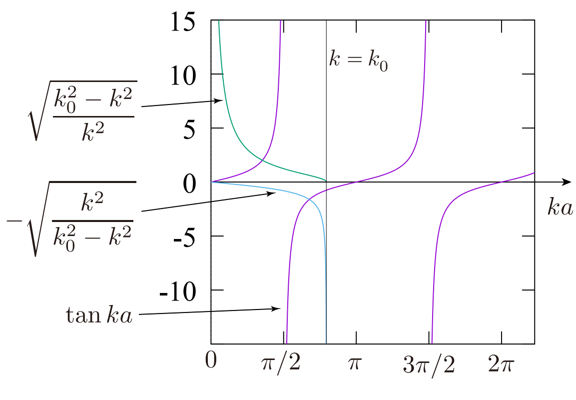
偶関数 $(C = 0, B = A)$・奇関数 $(D = 0, B = -A)$ それぞれの場合に対して，境界条件より

$$\tan ka = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{-E}{E+V_0}} \tag{6}$$
$$\tan ka = -\frac{k}{\kappa} = -\sqrt{\frac{E+V_0}{-E}} \tag{7}$$

4. $k_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar$ とすると

$$\tan ka = \frac{\sqrt{k_0^2 - k^2}}{k} \quad \text{または} \quad \tan ka = -\frac{k}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \tag{8}$$

ただし $0 < k < k_0$。図示すると，解が 2 つだけなのは $\pi/2 < k_0 a < \pi$ である。



B. 略解

5. ゼロ

6. 縮退しているので，どれか一つの波動関数を選んでハミルトニアンを作用させればよい。計算の結果，$E = -\hbar^2/(8ma_0^2)$ を得る。

7. L_z を $\psi_{0,3}$ に作用させることで，どちらも固有値 0 を得る。

8. 両者の線形結合を作ると固有状態になることがわかる：$\psi_\pm = (\psi_1 \pm i\psi_2)/\sqrt{2}, L_z\psi_\pm = \pm\hbar\psi_\pm$。

9. まず，行列要素を作る。非対角成分は ψ_0, ψ_3 の部分だけである。$\langle\psi_0|z|\psi_3\rangle = \langle\psi_3|z|\psi_0\rangle = -3a_0$ より，固有状態は ψ_0, ψ_3 の重ね合わせによって構成できる。エネルギーシフトは $\Delta E = -3ea_0E_0, 0, 0, 3ea_0E_0$。固有関数はそれぞれ $(\psi_0 + \psi_3)/\sqrt{2}, \psi_1, \psi_2, (\psi_0 - \psi_3)/\sqrt{2}$。

10. $S_xS_y\chi_\pm = \pm\frac{i\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\chi_\pm \pm \frac{i\hbar^2}{4}\chi_\pm = i\frac{\hbar}{2}S_z\chi_\pm$。同様に S_yS_x も計算すると $[S_x, S_y]\chi_\pm = i\hbar S_z\chi_\pm$。よって $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$。

11. 磁場方向に量子化された磁気量子数で考えればすでに対角化されているので，エネルギーシフトは $\Delta E = -2\mu_\mathrm{B}B_0, -\mu_\mathrm{B}B_0, -\mu_\mathrm{B}B_0, 0, 0, \mu_\mathrm{B}B_0, \mu_\mathrm{B}B_0, 2\mu_\mathrm{B}B_0$。固有関数はそれぞれ $\psi_-\chi_-, \psi_0\chi_-, \psi_3\chi_-, \psi_+\chi_-, \psi_-\chi_+, \psi_0\chi_+, \psi_3\chi_+, \psi_+\chi_+$。