I 解答例

1. ラグランジアン $L = T - V$ の導出

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \left\{kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2\right\}},$$

もしくは，その変形。

2. 各階の運動方程式

$$\boxed{m\ddot{x}_1 + 3k\,x_1 - k\,x_2 = 0}, \tag{1}$$

$$\boxed{m\ddot{x}_2 - k\,x_1 + 2k\,x_2 - k\,x_3 = 0}, \tag{2}$$

$$\boxed{m\ddot{x}_3 - k\,x_2 + k\,x_3 = 0}。 \tag{3}$$

3. 行列表示

$$\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = 0, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\boldsymbol{K} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}。$$

4. 固有振動数

固有解を $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{A}e^{i\omega t}$ と置き $\det\bigl(K - \omega^2 I\bigr) = 0$ より

$$\boxed{-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0}, \qquad \lambda \equiv \frac{m}{k}\omega^2。$$

因数分解すると

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0 \implies \lambda_1 = 2 - \sqrt{3},\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{3}。$$

よって

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k}{m}\lambda_i} = \boxed{\sqrt{\frac{k}{m}\left(2 - \sqrt{3}\right)}}, \boxed{\sqrt{\frac{2k}{m}}}, \boxed{\sqrt{\frac{k}{m}\left(2 + \sqrt{3}\right)}}, \qquad (i = 1, 2, 3)。$$

5. 数値例（最も遅い固有振動数）

最小固有角振動数 $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{k}{m}\,(2 - \sqrt{3})} = 7.32\ \mathrm{s}^{-1}$

最小固有振動数

$$\boxed{f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = 1.17\ \mathrm{Hz} \approx 1.2\ \mathrm{Hz}}。$$

6. 固有振動数を 3 Hz 以上にするための柱本数

n 本の柱による水平方向ばね定数は $k = nk_0$ ($k_0 = 10^7$ N/m)。

最小固有振動数について

$$f_{\min}\sqrt{n} \geq 3\ \mathrm{Hz} \implies n \geq \left(\frac{3}{1.17}\right)^2 \approx 6.58。$$

柱本数は整数であるため $\boxed{n = 7\ 本}$ が最小。

II 解答例

1. S_1上の表面電荷密度：$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$,

   S_2上の表面電荷密度：$\sigma_2 = -\frac{Q}{4\pi R_2^2}$

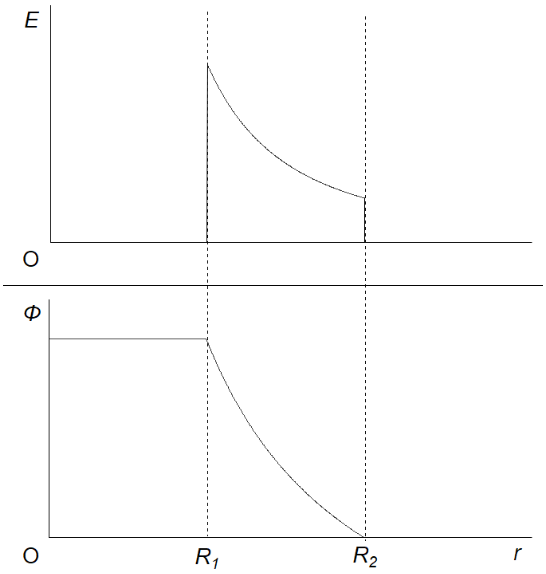
2. ガウスの法則を適用し，

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1 \le r < R_2) \\ 0 & (R_2 \le r) \end{cases}$$

   静電ポテンシャルは，

$$\phi(r) = -\int E(r)dr = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & (r < R_1) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & (R_1 \le r < R_2) \\ 0 & (R_2 \le r) \end{cases}$$

   グラフは以下のようになる。



3. $U_{\mathrm{E}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

4. リングを流れる電流: $\frac{Q\omega}{4\pi}\sin\theta\, d\theta$

   このリングを流れる電流によって原点に生じる磁束密度は$dB_z(\theta) = \frac{\mu_0 Q\omega \sin^3\theta}{8\pi R_1}d\theta$。

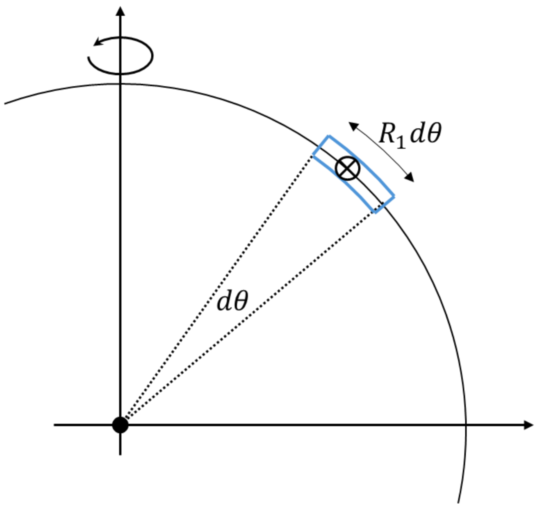
5. $B(r=0) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 Q\omega \sin^3\theta}{8\pi R_1}d\theta = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi R_1}$

6. 磁場に関するガウスの法則（div $\boldsymbol{B} = 0$ の積分形$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0$）を S_1をまたぐ微小立方体に適用すると，$B_r(r = R_1^+) = B_r(r = R_1^-)$を得る（$S_1$で連続）。$B_r = \frac{\partial\Phi_{\mathrm{B}}}{\partial r}$だから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\alpha_n}{R_1}P_n(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(n+1)\beta_n}{R_1}P_n(\cos\theta)$$

   → $\alpha_n = -\frac{n+1}{n}\beta_n$

7. アンペールの法則を S_1 をまたぐ微小長方形の経路に適用すると $\mu_0 dI = \{B_\theta(r = R_1^+) - B_\theta(r = R_1^-)\}R_1 d\theta = \left\{\frac{\partial \Phi_B}{\partial \theta}(r = R_1^+) - \frac{\partial \Phi_B}{\partial \theta}(r = R_1^-)\right\} d\theta$ となる。



ところで，4.から $\frac{dI}{d\theta} = \frac{Q\omega}{4\pi}\sin\theta = -\frac{Q\omega}{4\pi}\frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\frac{Q\omega}{4\pi}\frac{d}{d\theta}P_1(\cos\theta)$ なので，

$$-\frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi}P_1(\cos\theta) = \Phi_B(r = R_1^+) - \Phi_B(r = R_1^-)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n)P_n(\cos\theta)$$

ルジャンドル多項式の直交性から $\alpha_n = \beta_n = 0\ (\text{for } n \neq 1)$ を得る。$n = 1$ に関しては $-\frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi} = \beta_1 - \alpha_1$ を得るが，6.の結果から，$\alpha_1 = -2\beta_1$ なので

$$\alpha_1 = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi}, \qquad \beta_1 = -\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi}$$

8. 前問までの結果から

$$\Phi_B(r < R_1) = \frac{\mu_0 Q\omega r}{6\pi R_1}\cos\theta$$
$$\Phi_B(r > R_1) = -\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi}\frac{R_1^2}{r^2}\cos\theta$$

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\Phi_B$ から

$r < R_1$ では

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \Phi_B}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_B}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi_B}{\partial \phi}\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi R_1}(\cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta) = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi R_1}\mathbf{e}_z$$

$r > R_1$ では

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu_0 Q\omega R_1^2}{12\pi}\left(-\frac{2}{r^3}\cos\theta\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r^3}\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta\right) = \frac{\mu_0 Q\omega R_1^2}{12\pi r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{e}_r + \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta)$$

9. 電場が存在するのは S_1 と S_2 で囲まれた領域だけ。この領域でポインティングベクトルは $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/\mu_0 == \frac{Q^2\omega R_1^2}{48\pi^2\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^5}\mathbf{e}_\varphi$

したがって，ポインティングベクトルは $\mathbf{e}_\varphi$ 成分だけを持つので，xy 面内で循環する。