２０２６年度

千葉大学大学院融合理工学府　博士前期課程

学力検査問題

（数学情報科学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

令和７年８月７日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１２題ある．

   A0 は全員が解答すること．

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること．
   （４題以上解答することは認められない.）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること．
   （２題以上解答することは認められない.）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてにコース名と受験番号を記入のこと．

3. 各解答用紙には，解答しようとする問題番号を明記し，

   １枚に１題だけを解答すること．

   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない．

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい．

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい．

$\boxed{\textbf{A0}}$ 写像の列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$ がある．合成を $c = h \circ g \circ f$, $d = f \circ h \circ g$, $e = g \circ f \circ h$ とおく．

(1) $c = \mathrm{id}_X$ (恒等写像) ならば, f は単射であり h は全射であることを示せ.

(2) $c = \mathrm{id}_X$, $d = \mathrm{id}_Y$, $e = \mathrm{id}_Z$ ならば, f, g, h は全て全単射であることを示せ.

(3) $c = \mathrm{id}_X$ かつ g は単射でも全射でもないような X, Y, Z, f, g, h の例を挙げよ.

(4) $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} c^n(X)$, $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} d^n(Y)$ とおくとき, $f(I) \subseteq J$ となることを証明せよ (c^n, d^n はそれぞれ c, d の n 個の合成).

(5) f が単射ならば (4) の I, J に対し $f(I) = J$ となることを証明せよ.

$\boxed{\textbf{A1}}$ 3 次実正方行列全体の集合 $M_3(\mathbb{R})$ は, 行列の和とスカラー倍によって 9 次元実ベクトル空間になる．$I_3 \in M_3(\mathbb{R})$ を単位行列とする．行列 $X \in M_3(\mathbb{R})$ に対し,

$$S_X := \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid (B + X)(B^2 - BX + X^2) = B^3 + X^3\}$$
$$T_X := \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid BX = XB\}$$

と定める．以下に答えよ.

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

のジョルダン標準形 J を求めよ.

(2) T_J の元を全て求めよ.

(3) T_A の次元を求めよ.

(4) 集合 Σ_X を

$$\Sigma_X := \{V \mid I_3 \in V \subseteq S_X,\ V \text{ は } M_3(\mathbb{R}) \text{ の部分ベクトル空間}\}$$

により定める．$T_X \in \Sigma_X$ であることを示せ.

(5) 行列 $X \in M_3(\mathbb{R})$ に対し, T_X は, Σ_X の包含関係に関する最大元であることを示せ.

$\boxed{\textbf{A2}}$　以下の問いに答えよ.

(1) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ は $(-1,1)$ において連続かつ $(-1,0)\cup(0,1)$ において微分可能であるとする．さらに, $\lim_{x\to 0} f'(x)$ が存在するとする．このとき, f は $x=0$ で微分可能であり, $f'(0)=\lim_{x\to 0} f'(x)$ となることを示せ.

(2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であり, a,b は $a<b$ を満たす実数であるとする．ただし, g' が連続であるとは仮定しない．このとき, $g'(a)<0<g'(b)$ ならば, ある $c\in(a,b)$ が存在して $g'(c)=0$ となることを示せ.

(3) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であり, a,b は $a<b$ を満たす実数であるとする．ただし, h' が連続であるとは仮定しない．このとき, $h'(a)<h'(b)$ ならば, 任意の $C\in(h'(a),h'(b))$ に対して, ある $c\in(a,b)$ が存在して $h'(c)=C$ となることを示せ.

$\boxed{\textbf{A3}}$　$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$ を $\mathbb{R}^3$ の単位球面とする. $\mathbb{R}^3$ には標準的な位相 $\mathcal{O}$ が入っているものとし, S^2 には $\mathbb{R}^3$ の部分空間としての相対位相 (これを $\mathcal{O}_{S^2}$ とかく) が入っているものとする.

S^2 の同値関係 $\sim$ を $x\sim y \iff x=\pm y$ で定め, $P=S^2/\sim$ を商集合, $\pi\colon S^2\to P$ を自然な射影とし, P には商位相 (これを $\mathcal{O}_P$ とかく) が入っているものとする.

(1) X を S^2 の部分集合とする. $X\in\mathcal{O}_{S^2}$ となるための必要十分条件を答えよ.

(2) 位相空間 $(S^2,\mathcal{O}_{S^2})$ はコンパクトになることを示せ. ハイネ・ボレルの定理およびその拡張は証明抜きに使用してよい.

(3) Y を P の部分集合とする. $Y\in\mathcal{O}_P$ となるための必要十分条件を $\mathcal{O}_{S^2}$ を用いて答えよ.

(4) P はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\textbf{A4}}$　$0<p<1$ とする．表の出る確率が p，裏の出る確率が $1-p$ のコインを繰り返し投げる．初めて表が出るまでにコインを投げた回数 X の従う確率分布を，パラメーター p の幾何分布とよぶ.

(1) X のモーメント母関数（積率母関数）を求め，さらに期待値と分散を求めよ.

(2) 正整数 m,n について，X が $P(X>m+n\,|\,X>m)=P(X>n)$ を満たすことを示せ．この性質を確率分布の無記憶性とよぶ.

(3) 正整数上の確率分布で無記憶性をもつものは幾何分布のみであることを示せ.

A5 次の Python のプログラムに関して各小問に答えよ.

```
def Choose(n, w):
  ch = 1
  for i in range(w):
    ch = ch * (n-i) // (i+1)
  return ch

def subConstBE(n, w, i):
  if (n == 0):
    BE = []
  else:
    if (i < Choose(n-1, w)):
      BE = [0] + subConstBE(n-1, w, i)
    else:
      BE = [1] + subConstBE(n-1, w-1, i- Choose(n-1, w))
  return BE

def ConstBE(n, w, i):
  if (i < 0) or (i >= Choose(n, w)):
    print("Out of range")
    exit()
  return subConstBE(n, w, i)
```

(1) `Choose`(n, w) の値を n と w を用いて表せ. ただし n と w は `int` 型を持ち, $n \geq w \geq 0$ である.

(2) `ConstBE`$(6, 3, 4)$ の出力を求めよ.

(3) `ConstBE`(n, w, i) の出力が

`[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]`

となる n, w, i を求めよ.

$\boxed{\textbf{B1}}$ 集合を $X = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, 群を $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/H$ とする. ここで,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Q}, ad - bc \neq 0 \right\},$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in \mathbb{Q}, k \neq 0 \right\}.$$

自然な全射 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \to G$ による $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の像を $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表す.

(1) 写像 $G \times X \to X$; $(g, x) \mapsto g \cdot x$ を,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}$$

と定めるとき, これは well-defined であり, G の X への左作用となることを証明せよ.

(2) 任意の $x \in X$ に対して, x の G 軌道

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

が X において稠密であることを証明せよ. ただし, X の位相は $\mathbb{R}$ のユークリッド位相から誘導されるものとする.

(3) 元 $x \in X$ に対して, 固定部分群

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

が非自明となるための必要十分条件を求めよ.

(4) G_x は非自明ならば無限アーベル群であるということを証明せよ.

$\boxed{\textbf{B2}}$ $A := \mathbb{C}[x, y, z]$ を複素数係数 3 変数多項式環とし, イデアル $I \subseteq A$ を

$$I := (x^2y - z^2, yz - x^3, zx - y^2)$$

により定める. A の元 f に対し, その A/I での像を $\overline{f}$ で表す.

(1) A/I において,

$$\overline{x^4} = \overline{y^3}$$

であることを示せ.

(2) A/I は $\mathbb{C}$ 加群として,

$$S := \{\overline{z}\} \cup \left\{ \overline{x^i y^j} \mid i \geq 0,\ j \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

が生成することを示せ.

(3) 環準同型 $\phi\colon A \to \mathbb{C}[t]$ を $\phi(f) = f(t^3, t^4, t^5)$ により定めるとき,

$$I = \mathrm{Ker}(\phi)$$

を示せ.

(4) A には通常の掛け算によって $\mathbb{C}[x]$ 加群の構造が入る. $I \subseteq A$ は $\mathbb{C}[x]$ 部分加群でもあるので, A/I には自然に $\mathbb{C}[x]$ 加群の構造が入る. $\mathbb{C}[x]$ 加群として

$$A/I \cong \mathbb{C}[x] \oplus \mathbb{C}[x] \oplus \mathbb{C}[x]$$

であることを示せ.

$\boxed{\textbf{B3}}$ M を m 次元可微分多様体，$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ と (U_β, φ_β) を座標近傍で $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となるものとする．点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ の $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ での局所座標を $(x_1, \ldots, x_m)$, (U_β, φ_β) での局所座標を $(y_1, \ldots, y_m)$ とする．

(1) M の点 p における接ベクトル空間 T_pM の基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_m}$ および $\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_m}$ について，$\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ を $\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_m}$ で表せ.

(2) 二つの m 次微分形式が，点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ の近くで局所座標を用いて $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$, $dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m$ と表されているとする．$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = f\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m$ をみたす関数 f を求めよ.

(3) $m = 2$ とする．局所座標の間の座標変換が $(y_1, y_2) = (2x_1 + x_2, -x_1 + 4x_2)$ で与えられているとする．点 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ での接ベクトル $v \in T_pM$ が $v = a\dfrac{\partial}{\partial x_1} + b\dfrac{\partial}{\partial x_2} = c\dfrac{\partial}{\partial y_1} + d\dfrac{\partial}{\partial y_2}$ をみたすとき，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ となる行列 C を求めよ.

$\boxed{\textbf{B4}}$ $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間を

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$X := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \leq 0\} \cup \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq 1\},$$
$$Y := X \cup \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$$

と定める.

(1) X の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) Y の整係数ホモロジー群を求めよ.

$\boxed{\textbf{B5}}$ $0 < r < R$ なる実数に対して，複素数平面内に曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 を下のように定める．

$$
\begin{aligned}
&C_1\colon z(\theta) = re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi/4]) \\
&C_2\colon z(t) = t \quad (t \in [r, R]) \\
&C_3\colon z(\theta) = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi/4]) \\
&C_4\colon z(t) = te^{i\pi/4} \quad (t \in [r, R])
\end{aligned}
$$

(1) 次の等式を示せ．

$$\lim_{r \to +0} \int_{C_1} \exp(iz^2)\, dz = 0, \qquad \lim_{R \to +\infty} \int_{C_3} \exp(iz^2)\, dz = 0.$$

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{r \to +0} \lim_{R \to +\infty} \int_{C_4} \exp(iz^2)\, dz.$$

(3) 次の広義積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx.$$

$\boxed{\textbf{B6}}$ 実数値の未知関数 $x(t)$ に関する次の単独 2 階常微分方程式を考える．

$$p(t)x'' + p'(t)x' + q(t)x = 0.$$

ここで, $p(t)$, $q(t)$ は $p(t) > 0$, $q(t) > 0$ ($t \in \mathbb{R}$) をみたす, それぞれ C^1-級, C^0-級の実数値関数とする．

解 x に対して, $x(t_0) = 0$ となる点 t_0 のことを x の零点という．また 2 点 t_0, t_1 ($t_0 < t_1$) が x の隣り合う零点であるとは, t_0, t_1 が x の零点で, かつ開区間 (t_0, t_1) には x の零点がないことをいう．

(1) $x(t) \not\equiv 0$ なる解 x に対して

$$
\begin{cases}
x(t) = e^{\rho(t)} \sin\theta(t), \\
p(t)x'(t) = e^{\rho(t)} \cos\theta(t),
\end{cases}
$$

となる C^1-級の実数値関数 $\rho(t)$, $\theta(t)$ を定める．$\rho'(t)$ および $\theta'(t)$ を $p(t)$, $q(t)$, $\rho(t)$, $\theta(t)$ の式で表せ．

(2) t_0, t_1 ($t_0 < t_1$) が解 x の隣り合う零点であって, $\rho(t)$, $\theta(t)$ は (1) で定めた関数とする．$\theta(t_1) - \theta(t_0)$ を求めよ．

(3) $p(t)q(t) \equiv 1$ をみたすとする．$\int_{-\infty}^{\infty} q(t)dt = +\infty$ ならば, $x(t) \not\equiv 0$ なる任意の解 x は零点を無限個持つことを示せ．

B7 可測関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $\lambda > 0$ に対して,

$$\|f\| := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$
$$(S_\lambda f)(x) := \lambda^{1/2} f(\lambda x)$$

と定める．また, $j = 1, 2$ とし, $f_j\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を可測関数で $\|f_j\| < \infty$ を満たすものとする．このとき, 以下の問いに答えよ．ただし, 任意の $\epsilon > 0$ と $\|f\| < \infty$ を満たす可測関数 f に対して, あるコンパクト台をもつ連続関数 g が存在して, $\|f - g\| < \epsilon$ を満たすことは証明せずに用いて良い.

(1) $\|f_1 + f_2\| \le \|f_1\| + \|f_2\|$ を示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{\lambda\to 1} \|S_\lambda f_1 - f_1\| = 0$ を示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0} \|S_\lambda f_1 - f_2\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$ を示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{\lambda\to \infty} \|S_\lambda f_1 - f_2\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$ を示せ.

B8 $(X_i)_{i=1,2,\cdots}$ を独立同分布な実数値確率変数列とする． $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく．以下では $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log 0 = -\infty$ とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 実数列 $(a_n)_{n=1,2,\cdots}$ は $a_{m+n} \ge a_m + a_n$ $(m, n \ge 1)$ を満たすとする．このとき極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ が $\pm\infty$ を含めて存在し， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_n \frac{a_n}{n}$ であることを示せ.

(2) (1) を用いて，任意の実数 c に対して極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(S_n \ge cn)$ が $\pm\infty$ を含めて存在することを示せ.

つぎに以下の命題に関して，問 (3)，(4) に答えよ.

命題： 上の X_1 に対してさらに，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $E[e^{tX_1}] < \infty$ と仮定する．このとき $a > E[X_1]$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(S_n \ge an) = -I(a)$$

が成り立つ．ただし $I(a) = \displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} \left(at - \log E[e^{tX_1}]\right)$ である.

(3) $P(X_1 > 0) = 0$ かつ $a = 0$ のとき上の命題を示せ.

(4) X_1 が平均が μ，分散が v の正規分布に従う確率変数であるとき，$I(a)$ を sup を含まない形で求めよ.

$\boxed{\textbf{B9}}$ 目的変数 y を，p 個の説明変数 $x_1, \ldots, x_p$ の線形和 $b_0 + \sum_{j=1}^{p} b_j x_j$ で説明する重回帰分析を考える．データは n 個の対象からなる．ただし $n > p+1$ とする．対応する n 次元ベクトルを $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \in \mathbb{R}^n$ とし，また全ての成分が 1 である n 次元ベクトルを $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ とする．$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ の一次独立性を仮定する．回帰係数ベクトルを $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{p+1}$，$n \times (p+1)$ 説明変数行列を $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_0\ \boldsymbol{x}_1\ \ldots\ \boldsymbol{x}_p)$ として，以下の (1)–(5) に答えなさい．

(1) $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\|^2$ を最小化する最小二乗解は $\hat{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ であることを示しなさい．

(2) 予測値ベクトル $\hat{\boldsymbol{y}}$ は，$\hat{\boldsymbol{b}}$ を用いて $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ と定義される．$n \times n$ 正方行列

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \tag{$\star$}$$

の性質について，(i) $\operatorname{tr}\boldsymbol{Q} = p + 1$, (ii) $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1$ を示しなさい．

(3) 統計モデル $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\epsilon}$（ただし，$\boldsymbol{\epsilon}$ は確率的に振る舞う誤差項で，$\mathrm{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I}_n$ を満たす）から $\boldsymbol{y}$ が観測されたとする．最小二乗解 $\hat{\boldsymbol{b}}$ が $\boldsymbol{b}$ の不偏推定量であることを示しなさい．

重要な説明変数の組を適切に選ぶことは実データ解析において重要である．今，$x_1, \ldots, x_{p-1}$ の重要性は経験的に認知されている一方，x_p の重要性は不明であるとする．このとき，x_p を含まないモデル $\mathcal{M}_1$ と含んだモデル $\mathcal{M}_2$ の比較を交差検証法で行いたい．交差検証法は各モデルの平均二乗誤差（Mean Squared Error: MSE）の比較で行われる．$\mathcal{M}_2$ の平均二乗誤差 MSE_2 は以下のように導出される．i 番目のデータを抜いた時の最小二乗解を $\hat{\boldsymbol{b}}_{-i}$ とする．i 番目の説明変数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}} = (1, x_{i1}, \ldots, x_{ip})$ に関する線形和 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{b}}_{-i}$ を用いて y_i を予測する場合の二乗誤差は $(y_i - \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{b}}_{-i})^2$ である．従って，$i = 1, \ldots, n$ に対する平均二乗誤差は

$$\mathrm{MSE}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{b}}_{-i})^2 \tag{$\triangle$}$$

である．$\mathcal{M}_1$ に対しても平均二乗誤差が同様に得られる．最終的に，平均二乗誤差がより小さいモデルを選ぶことになる．

(4) $Q_{ii} < 1$ のとき ($\triangle$) の $\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{b}}_{-i}$ は，

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{b}}_{-i} = \frac{\hat{y}_i - Q_{ii}y_i}{1 - Q_{ii}} \qquad \text{ただし} \begin{cases} \hat{y}_i\colon \text{(2) の } \hat{\boldsymbol{y}} \text{ の第 } i \text{ 成分} \\ Q_{ii}\colon (\star) \text{ で定義される } \boldsymbol{Q} \text{ の } (i,i) \text{ 成分} \end{cases} \tag{$\diamondsuit$}$$

と書けることを示しなさい．

(5) ($\diamondsuit$) を用いると，($\triangle$) で与えられる $\mathcal{M}_2$ の平均二乗誤差は，

$$\mathrm{MSE}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - Q_{ii}}\right)^2 \tag{$\clubsuit$}$$

と書けることを示しなさい．また ($\clubsuit$) の表現を使って平均二乗誤差を計算することの利点を説明しなさい．

B10 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の基底を $|0\rangle := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$|1\rangle := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ で定める．そして，長さ n のビット列 $\boldsymbol{c} := (c_1, c_2, \ldots, c_n)$，$c_i \in \{0,1\}$，$1 \le i \le n$，に対して $\mathbb{C}^2$ の n 次テンソル空間 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の元 $|\boldsymbol{c}\rangle$ を $|\boldsymbol{c}\rangle := |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \cdots \otimes |c_n\rangle$ と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $|\phi_1\rangle := \dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$，$|\phi_2\rangle := \dfrac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$，$|\phi_3\rangle := \dfrac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$，$|\phi_4\rangle := \dfrac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$，とそれぞれおくとき，$|\phi_1\rangle$，$|\phi_2\rangle$，$|\phi_3\rangle$，$|\phi_4\rangle$ が $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ の $\mathbb{C}$ 上基底であることを示しなさい．

(2) 0 でない $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$|\psi_1^{(\alpha,\beta)}\rangle, |\psi_2^{(\alpha,\beta)}\rangle, |\psi_3^{(\alpha,\beta)}\rangle, |\psi_4^{(\alpha,\beta)}\rangle \in \mathbb{C}^2$ を次で定める．

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\psi_1^{(\alpha,\beta)}\rangle + |\phi_2\rangle \otimes |\psi_2^{(\alpha,\beta)}\rangle + |\phi_3\rangle \otimes |\psi_3^{(\alpha,\beta)}\rangle + |\phi_4\rangle \otimes |\psi_4^{(\alpha,\beta)}\rangle$$

このとき，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，次を満たすユニタリ行列 U_2，U_3，U_4 をそれぞれ求めよ．

$$U_2|\psi_2^{(\alpha,\beta)}\rangle = |\psi_1^{(\alpha,\beta)}\rangle,\ U_3|\psi_3^{(\alpha,\beta)}\rangle = |\psi_1^{(\alpha,\beta)}\rangle,\ U_4|\psi_4^{(\alpha,\beta)}\rangle = |\psi_1^{(\alpha,\beta)}\rangle$$

(3) $V := \{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle\}$，$E := \{(|\phi_i\rangle, |\phi_j\rangle) \in V \times V \mid |\phi_i\rangle = U_2 \otimes U_3|\phi_j\rangle\}$ と定めたグラフ $G := (V, E)$ を図示せよ．

B11 $\Sigma = \{a, b, c\}$ をアルファベットとする．語 $w \in \Sigma^*$ と自然数 n に対して，w^n で w を n 回繰り返して得られる語を表す．以下の問いに答えよ．ただし次の補題は自由に用いてよい．

反復補題 文脈自由言語 L に対して，ある定数 N が存在して，長さが N より長い任意の語 $w \in L$ に対して，$w = xyzuv$ という分解が存在して次を満足する．(i) yu は空ではない．(ii) 任意の自然数 n に対して $xy^nzu^nv \in L$．

(1) $L_1 = \{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が文脈自由言語でないことを示せ．

(2) 文脈自由言語 $L, L' \subseteq \Sigma^*$ について，その共通部分 $L \cap L'$ は必ずしも文脈自由ではないことを示せ．

(3) 1 文字だけから成るアルファベット $\Sigma_1 = \{a\}$ を考える．文脈自由言語 $L, L' \subseteq \Sigma_1^*$ について，その共通部分 $L \cap L'$ は文脈自由か．理由も述べよ．

$\boxed{\textbf{B12}}$ 次のように OCaml の関数を定義する．

```
let rec fold_right f s e =
  match s with
    [] -> e
  | x :: xs -> f x (fold_right f xs e)
let map_app f s1 s2 = fold_right (fun x ms -> f x :: ms) s1 s2
let app s1 s2 = map_app (fun x -> x) s1 s2
let rev s = fold_right (fun x rs -> app rs [x]) s []
let rec ksss k s =
  if k = 0 then [[]]
  else match s with
         [] -> []
       | x :: xs ->
          map_app (fun s -> x :: s) (ksss (k - 1) xs) (ksss k xs)
```

(1) 長さ n のリスト s に対し，`rev` s を評価したときのコンス (::) の総呼び出し回数を n を用いて表せ．

(2) `ksss 2 [0; 1; 2]` の評価結果を記せ．

(3) 非負整数 k および長さ n のリスト s に対し，`ksss` k s を評価したときのコンスの総呼び出し回数を $K(k,n)$ と書くことにする．非負整数 k, n に対し，$K(k+1,n+1) - K(k+1,n) - K(k,n)$ の値を k, n を用いて表せ．

(4) 次の性質をすべて満たす OCaml の関数 `rksssa` を定義せよ．

- 任意の非負整数 k と整数リスト s_1, s_2，および整数リストのリスト σ に対し，`rksssa` k s_1 s_2 σ の評価結果と `map_app (fun s -> app (rev s)` s_2`) (ksss` k s_1`)` σ の評価結果が (OCaml の `=` による比較の意味で) 等しい．
- 非負整数 k と整数リスト s_1, s_2，および整数リストのリスト σ に対し，`rksssa` k s_1 s_2 σ を評価したときのコンスの総呼び出し回数を s_1 の長さ n を用いて $R(k,n)$ と書けて，任意の非負整数 k, n に対し，$R(k+1,n+1)-R(k+1,n)-R(k,n) = 1$ が成り立つ．