問題　I

下記の二次曲面

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz = 1 \quad \text{(i)}$$

について，以下の設問(1)～(6)に答えなさい。

(1) $X = (x \quad y \quad z)^T$ が与えられたとき，式(i)の左辺を $X^T M X$ の形に変形すると，

$M = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ はどのような行列になるか，計算しなさい。ただし，同じ記号には同じ値が入る。また，添字Tは転置を表す。

(2) 行列 M に対する固有値λ_1，λ_2，λ_3と対応する固有ベクトル$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$をそれぞれ求めなさい。ただし，$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3$とする。また，固有ベクトルには大きさが 1 となるように正規化を行うこと。

(3) $U = (\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3)$ としたときの $U^{-1}MU$ を求めなさい。

(4) 座標変換 $X = UX'$ により，式(i)の左辺を新しい座標 $X' = (x' \quad y' \quad z')^T$ で表すことにする。このとき，新しい座標系における方程式を標準形に書き直しなさい。

(5) (4)で得られた標準形を $Q(X')$ としたとき，$Q(X') = 1$ が表す形状を以下から選びなさい。
【楕円体，一葉双曲面，二葉双曲面，楕円円錐面】

(6) $Q(X') \leq 1$ および $-h \leq z' \leq h$ の条件を満たす範囲の体積を求めなさい。ただし，答えだけでなく，答えを導く過程も記述しなさい。

二次曲面：quadric surface，左辺:left hand side，記号：symbol，添字：suffix，転置：transpose，固有値：eigen value，固有ベクトル：eigen vector，正規化：normalization，座標変換：coordinate transformation，標準形：normal form，等式：equality，形状：shape，楕円体：ellipsoid，一葉双曲面：hyperboloid of one sheet，二葉双曲面：hyperboloid of two sheets，楕円円錐面：elliptic cone，体積：volume，答えを導く過程：process of deriving the answer

問題　II

周期Tである関数$f(t)$の複素形式でのフーリエ級数展開は次式で表される。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{(i)}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad \text{(ii)}$$

ここで，jは虚数単位，nは整数，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$，$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$を表す。
また，床関数 $\lfloor x \rfloor$ は，実数xに対してx以下の最大の整数と定義される。
このとき，周期関数

$$f(t) = t - 2\pi\left\lfloor \frac{t}{2\pi} + 0.5 \right\rfloor + \pi \qquad \text{(iii)}$$

について，以下の設問に答えなさい。

(1) 関数$f(t)$の$-2\pi \le t < 2\pi$でのグラフの概形を示しなさい。

(2) 関数$f(t)$の周期を答えなさい。

(3) $f(t)$のフーリエ係数c_0を求めなさい。ただし，答えだけでなく，答えを導く過程も記述しなさい。

(4) $f(t)$のフーリエ係数c_n (ただし，$n \neq 0$)を求めなさい。ただし，記号はnとjだけを用いなさい。また，答えだけでなく，答えを導く過程も記述しなさい。

(5) $|n| \le 5$として，フーリエ係数から$f(t)$の近似関数$k_5(t)$を表すと以下の式となる。式中の①から④として適切な記号や数字の組み合わせを答えなさい。ただし，記号はπ, n, j, tだけを用いなさい。

$$k_5(t) = ① + \sum_{n=1}^{5} ②(-1)^{③} \sin ④ \qquad \text{(iv)}$$

(6) (5)で求めた近似関数$k_5(t)$と関数$f(t)$の区間$(-\pi,\ \pi)$での平均二乗誤差を小数点第 2 位まで求めなさい。

周期 : period，関数 : function，複素形式 : complex form，フーリエ級数展開 : Fourier series expansion，虚数単位 : imaginary unit，整数 : integer，床関数 : floor function，概形 : outline，フーリエ係数 : Fourier coefficient，記号 : symbol，数字 : numeral，答えを導く過程 : process of deriving the answer，近似関数 : approximate functions，平均二乗誤差 : mean squared error，小数点 : decimal point

問題 Ⅲ

長さ L，質量 M の一様な太さを有する剛体棒の運動について，以下の問いに答えなさい。重力加速度は g とする。解答欄には最終の答えだけを記入すること。

(1) 図 1 に示す座標系において，剛体棒が，重心回りの回転運動を行うとき，慣性モーメント I_1 を求めなさい。ただし，剛体棒の運動は XY 平面上で生じるものとし，解答には M, L のみ使用する。

（参考）一般的に質量 m の質点が回転半径を r として回転運動する場合，その質点にかかる慣性モーメント I は，$I = r^2 m$ で与えられる。

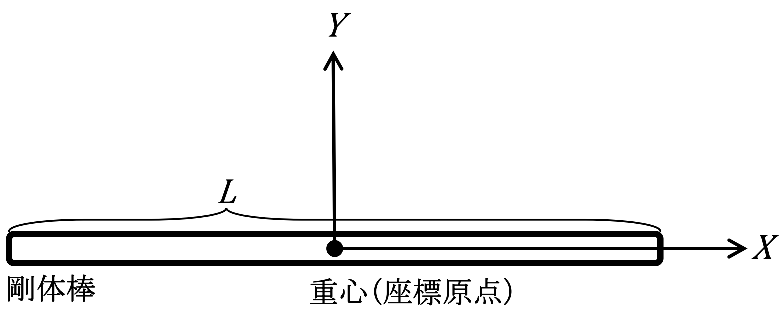

図 1

(2) 剛体棒の重心（座標原点）から X 軸方向に距離 d だけ離れた位置を回転中心とするとき，剛体棒の慣性モーメント I_2 を求めなさい。ただし，解答には M, L, d のみ使用する。

次に，この剛体棒が，摩擦を無視できない粗い面をもつ細い丸棒と手で軽く支えられてた水平な状態を考える。丸棒は，剛体棒の重心から距離 d だけ離れたところにあり，手は剛体棒が落下しないように支える。この状態から手を静かに離すと，剛体棒は，重心（座標原点）から距離 d だけに移動したところを回転中心として XY 平面上のみを運動するものとする。図 2 に示すように，丸棒から剛体棒に作用する垂直抗力を N，摩擦力を F，手を離した後に剛体棒が傾いた角度を θ とする。ただし，Y 軸方向の厚さは無視できるものとする。

(3) 剛体棒の重心の運動を考えるとき，回転運動の接線方向の運動方程式を求めなさい。ただし，円運動の接線方向は，図 2 に示す方向を正方向とし，解答には $M,\ d,\ \theta,\ \ddot{\theta},\ N,\ g$ のみ使用する。

(4) 回転運動の法線方向の運動方程式を求めなさい。ただし，円運動の法線方向は，図 2 に示す方向を正方向とし，解答には$M,\ d,\ \theta,\ \dot{\theta},\ F,\ g$ のみ使用する。

(5) 回転運動時のエネルギーのつり合いを求めなさい。ただし，剛体棒の慣性モーメント I_3 として，解答には $I_3,\ M,\ d,\ \theta,\ \dot{\theta}, g$ のみ使用する。

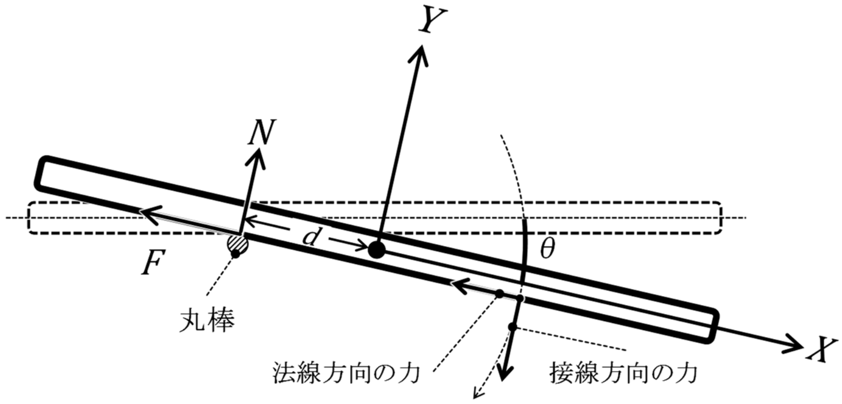

図 2

(6) 垂直抗力 Nを θ の関数として求めなさい。ただし，解答には，$M,\ d,\ \theta,\ g,\ L$ のみ使用する。

(7) 摩擦力 Fを θ の関数として求めなさい。ただし，解答には，$M,\ d,\ \theta,\ g,\ L$ のみ使用する。

(8) 静止摩擦係数を μ とするとき，剛体棒が丸棒に対して滑りだす角度 θ_fとするときの $\tan\theta_f$ を求めなさい。ただし，解答には，$d,\ L,\ \mu$ のみ使用する。

長さ L, 質量 M の一様な太さを有する剛体棒の運動：motion of a rigid rod of uniform thickness with length L and mass M, 剛体棒：rigid rod, 重力加速度：acceleration of gravity, 解答欄には最終の答えのみを記載する：provide only your final answer to each question in your answer sheet, 座標系：a cartesian coordinate system, 重心回りの回転運動：rotational motion at the rigid rod’s center of mass, 慣性モーメント：moment of inertia, 運動は XY 平面上で生じる：motion occurs in XY-plane, 解答には M, L のみ使用する：use only M, L in your answer, 質点：mass point, 回転半径：radius, 座標原点：origin of coordinate system, 距離 d だけ離れた位置：position at a distance d, 回転中心：center of rotation motion, 摩擦を無視できない粗い面をもつ細い丸棒：a cylindrical rod with a rough surface where friction cannot be ignored, 丸棒：cylindrical rod, 水平：horizontal, 垂直抗力：normal force, 摩擦力：friction, 角度：angle, Y 軸方向の厚さは無視できる：thickness in Y-direction is negligible, 回転運動の接線方向の運動方程式：equation of motion in tangential direction for rotational motion, 正方向：positive direction, 回転運動の法線方向の運動方程式：equation of motion in normal direction for rotational motion, エネルギーのつり合い：balance of mechanical energy, θ の関数：function of theta, 静止摩擦係数：coefficient of static friction, 剛体棒が丸棒に対して滑りだす角度：angle at which the rigid rod begins to slide relative to the cylindrical rod

問題 IV

以下の問いに答えなさい。解答欄には最終の答えだけを記入すること。

図 1 に示す直流電源と抵抗で構成された回路に流れる各電流を，網目電流法を用いて解くことを考える。

(1) 網目電流 I_1, I_2, I_3 [A]を用いて以下の網目方程式を記しなさい。

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

(2) この網目方程式を解き，網目電流 I_1, I_2, I_3 [A]および V_a [V]の電位を求めなさい。

図 2 に示す直流電源と抵抗で構成された回路の各電位を，節点電圧法を用いて解くことを考える。

(3) 節点電圧 V_1, V_2, V_3 [V]を用いて以下の節点方程式を記しなさい。

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

(4) この節点方程式を解き，節点電圧 V_1, V_2, V_3 [V]および I_a [A]の電流を求めなさい。

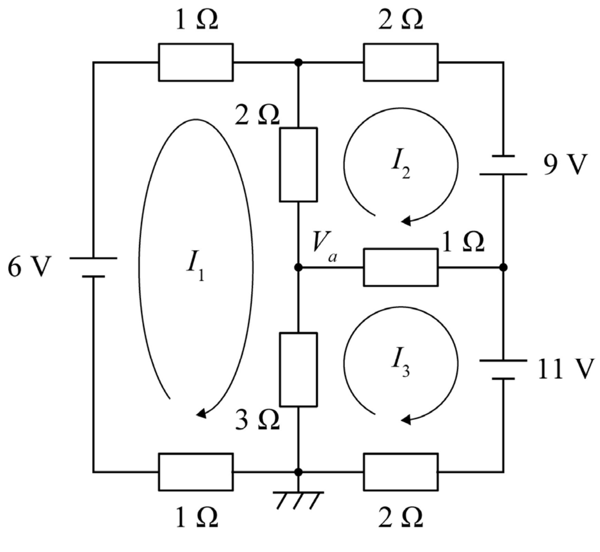

図 1

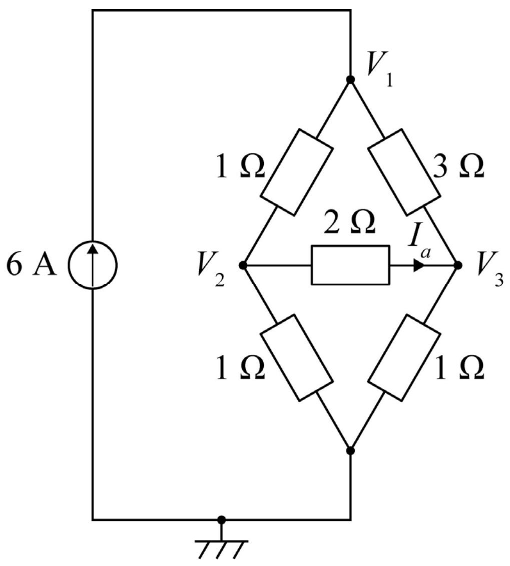

図 2

図 3 に示すように半径 r [m]，中心軸間の距離 d [m]，そして無限長の長さを持つ 2 本の平行導線に電流 I [A]が流れている。単位長さあたりの特性を調べるため，平行導線で囲まれた長さ 1 m の平面 S について考える。平行導線は完全導体であり，それぞれの導線内のインダクタンスは無視できる。平行導線の周囲は真空と仮定する。

(5) 一方の導線の中心から距離 x [m]だけ離れた位置における磁界の強さ H [A/m]を求めなさい。

(6) 真空中の透磁率 μ_0 [H/m]を用いて，(5)の位置における磁束密度 B [T]を求めなさい。

(7) 長さ 1 m，一方の導線の中心から距離 r から $d-r$ までの平面 S を貫く磁束 φ [Wb]を求めなさい。

(8) (7)の結果を用いて，この平行導線における単位長さあたりのインダクタンス L [H]を求めなさい。

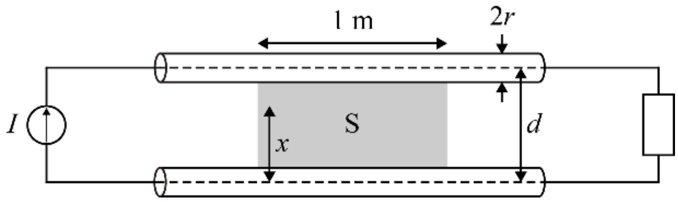

図 3

直流電源 : DC power supply，抵抗 : electrical resistance，回路 : electrical circuit，電流 : current，網目電流法：mesh current method，網目電流：mesh current，網目方程式：mesh equation，電位：potential，節点電圧法：node voltage method，節点電圧：node voltage，節点方程式：node equation，半径：radius，中心軸間の距離：center-to-center distance，無限長：infinite length，平行導線：parallel conductors，単位長さあたり：per unit length，特性：characteristics，平面：plane，完全導体：perfect conductor，インダクタンス：inductance，真空：free space，磁界の強さ：magnetic field strength，真空中の透磁率：permeability of free space，磁束密度：magnetic flux density，磁束：magnetic flux