問題１.

次の各問に答えなさい。解答は，解答欄に答えのみを記入しなさい。

問 1.　面積，曲線の長さ，表面積を求める公式について $\boxed{\text{①}}$ から $\boxed{\text{⑤}}$ の中に入る適切な式または微分形式を答えなさい。ただし，近似においては二次以上の微小量を無視し，角度 θ が小さいときは $\sin\theta \approx \theta$ とする。

(1) 図 1-1 のように，極方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線と，2 本の直線 $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ で囲まれる図形の面積 S を求める。図 1-1 右のような扇状の微小面積 ΔS を考える。θ が微小角 $\Delta\theta$ だけ変化したとき，微小面積 ΔS は，r および $\Delta\theta$ を用いて

$$\Delta S \approx \boxed{\text{①}}$$

と近似できる。したがって，面積 S を θ の積分として次のように表される。

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \boxed{\text{②}}\, d\theta$$

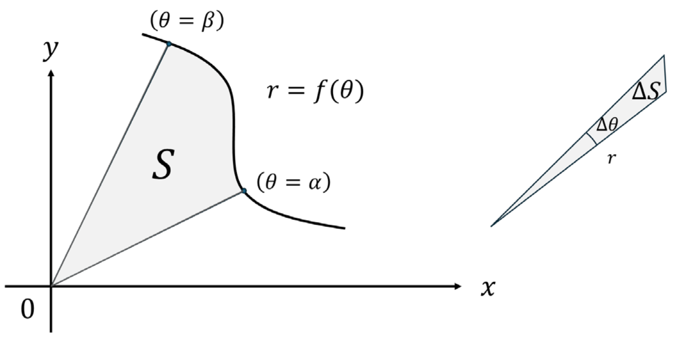

図1−1

(2) 図 1-2 のように，極方程式 $r = f(\theta)$ で表される微分可能な曲線の，区間 $\alpha \le \theta \le \beta$ における曲線の長さ L を求める。図 1-2 右に示すように，θ が微小角 $\Delta\theta$ だけ変化したときの r の変化を Δr，曲線上の点 (r, θ) の移動距離を Δl とすると，

$$\Delta l \approx \boxed{\text{③}}$$

と近似できる。したがって，曲線の長さ L は θ の積分として次のように表される。

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \boxed{\text{④}}\, d\theta$$

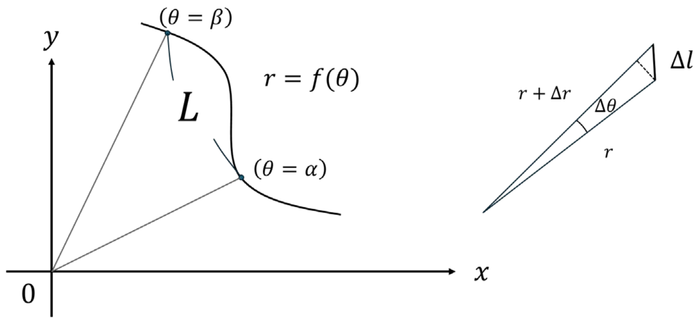

図1-2

(3) 図 1-3 に示す $y = f(x)$ によって定められる曲線と x 軸，および区間 $[\,a, b\,]$ に囲まれた<u>領域</u>を x 軸のまわりに<u>回転</u>させて得られる<u>回転体</u>の<u>側面積</u>（表面積） S を考える。このとき側面積 S は x の積分で次のように表される。ただし，側面積 S は<u>円盤</u>の<u>端面</u>（x 軸に垂直な面）を含まないものとする。

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{\boxed{⑤}}\,dx$$

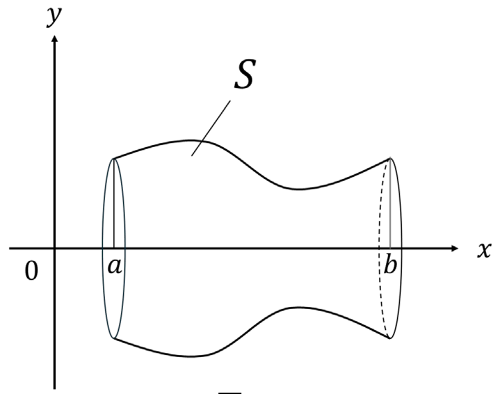

図1-3

問 2.　必要に応じて，問 1 の公式を用い，次の問いに答えなさい。

(1) 図 1-4 に示すように，極方程式 $r = e^{\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$で表されるらせん曲線とx軸に囲まれた領域の面積Sを求めなさい。

(2) 図 1-4 の極方程式 $r = e^{\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$の弧の長さLを求めなさい。

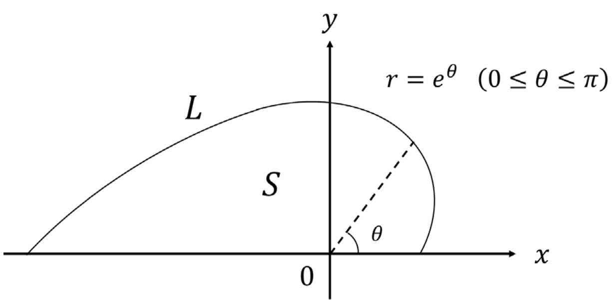

図1−4

面積：area，曲線：curve，表面積：surface area，微分形式：differential expression，微小量：infinitesimal quantity，無視：ignore，角度：angle，極方程式：polar equation，扇状：sector-shaped，微小面積：infinitesimal area，微小角：infinitesimal angle，近似：approximation，積分：integral，微分可能：differentiable，区間：interval，移動距離：distance traveled，領域：region，回転：rotation，回転体：solid of revolution，側面積：lateral surface area，円盤：disk，端面：end face，らせん曲線：spiral curve，弧：arc

問題２．

次の各問いに答えなさい。解答は，解答欄に答えのみを記入しなさい。

水平な粗い床上に置いて静止させた球を棒で突いた場合の球の運動について考える。いま，図 2-1 のように，球の中心の高さにある球面上の点を棒で突いた。このとき，球は回転せずに初速度 v_0 で動き出した。

なお，球の半径を R ，質量を M とし，密度は一様であるとする。棒は球の中心を含む鉛直面内で水平に球を突くものとし，棒の太さと空気抵抗は無視できる。また，球は常に床に接しながら運動し，球の重心速度 v と球の中心回りの回転角速度 ω は，図 2-1 の矢印の向きを正とする。床面の動摩擦係数を μ とし，重力加速度の大きさを g ，球を突いた時刻を $t=0$ とする。

なお，以下では球が床面をすべりながら運動する場合があることに注意すること。ここで，球が床面をすべるとは，球と床面の接点におけるすべり速度 v_{slip} がゼロにならないことを意味する。v_{slip} は次式で与えられる。

$$v_{\mathrm{slip}} = v - R\omega$$

なお，解答には R, M, g, t, μ, v_0 のうち必要なものを用いなさい。

問 1.　半径 R ，質量 M で密度が一様な球の中心軸に関する慣性モーメント I を求めなさい。

問 2.　棒で突いた直後（ $t>0$ ）から，球は床面との摩擦力により回転し始め，ある時刻 T まではすべりながら運動する。$0<t\leq T$ における球の並進運動と中心回りの回転運動に関する運動方程式について，以下の空欄①，②の中に入る適切な式を求めなさい。

$$\begin{cases} M\dfrac{dv}{dt} = \boxed{\quad ① \quad} \\ I\dfrac{d\omega}{dt} = \boxed{\quad ② \quad} \end{cases}$$

問 3. 問 2 で得られた運動方程式を解くことにより， $0<t\leq T$ における v と ω を求めなさい。

問 4. 床面を球がすべらずに進み始める時刻 T を求めなさい。

問 5. $t>T$ における重心速度 v を求めなさい。なお，床面との間の静止摩擦は無視できるものとする。

問 6. 時刻 $t=0$ から $t=T$ までに摩擦力が球に対してする仕事の大きさ W を求めなさい。

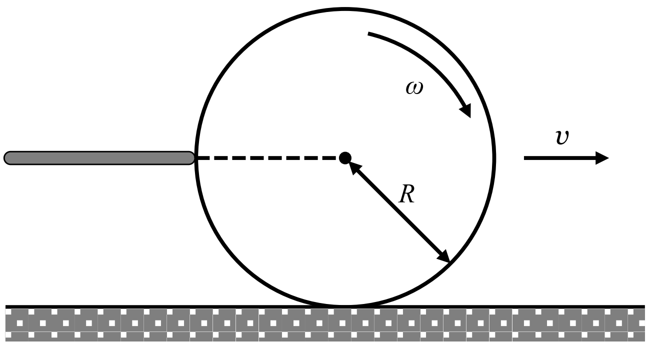

図 2-1

水平な粗い床:horizontal and rough floor, 静止:stationary, 球:sphere, 棒:stick, 運動:motion, 中心:center, 高さ: height, 初速度: initial velocity, 半径: radius, 質量: mass, 密度: density, 一様: uniform, 鉛直面:vertical plane, 太さ:thickness, 無視できる:negligible, 重心速度:velocity of center of gravity, 回転角速度:angular velocity of rotation, 矢印:arrow, 動摩擦係数:coefficient of kinetic friction, 重力加速度:gravity acceleration, 時間:time, 空気抵抗:air resistance, すべりながら:with slipping, 接点:point of contact, 慣性モーメント:moment of inertia, 摩擦力:frictional force, 運動方程式:motion equation, すべらずに:without slip, 静止摩擦:static friction, 仕事:work

問題３．

次の問 1~問 3 に答えなさい。解答は，結果のみを解答用紙の所定欄に記入すること。

問 1.　図 3-1 に示す回路において，正弦波交流電圧源の電圧 $\dot{V}$ の周波数が 60 Hz のとき，負荷の力率が 0.6 であった。電圧 $\dot{V}$ の周波数が 50 Hz のときの負荷の力率を求めなさい。なお，解答が根号を含む場合は根号の中の数をできるだけ小さな自然数にして答えなさい。

問 2.　図 3-2 に示す回路において，正弦波交流電圧源の電圧 $\dot{V}$ の周波数がある値のとき，電圧 $\dot{V}$ と電流 $\dot{I}$ の位相差がなくなった。このときの周波数 f_0 と電流 $\dot{I}$ を求め，R_1, R_2, L, C, n_1, n_2, $\dot{V}$ のうち必要なものを用いて答えなさい。なお，図中の変圧器は理想変圧器であるとする。

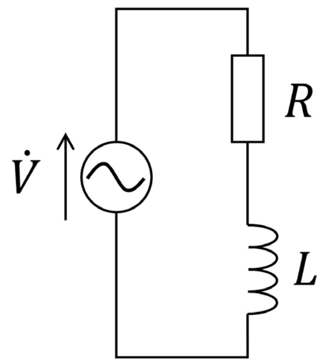

図 3-1

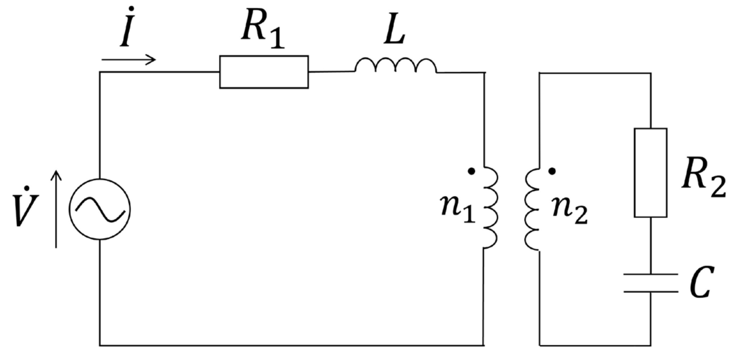

図 3-2

問 3. 図 3-3 に示す回路において，$v(t)$ は正弦波交流電圧源の電圧であり，電流 $i_L(t)$ は $i_L(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ [A] であった。このとき，以下の問いに<u>単位</u>を含めて答えなさい。

(1) 電流 $i_R(t)$ および $i(t)$ を求めなさい。

(2) この回路の<u>皮相電力</u>，<u>有効電力</u>，<u>無効電力</u>を求めなさい。

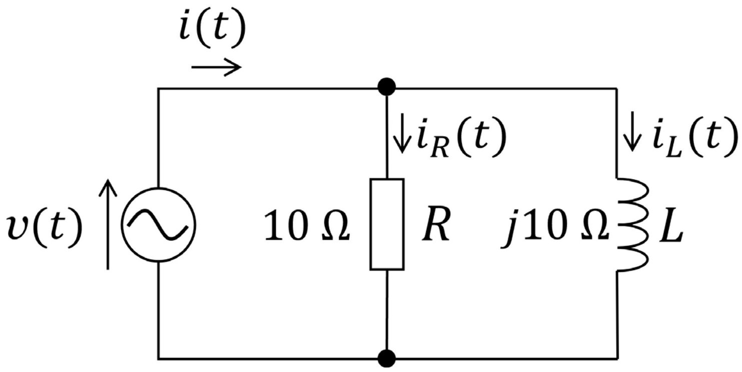

図 3-3

回路: circuit, 正弦波交流電圧源: sinusoidal AC voltage source, 周波数: frequency, 負荷: load, 力率: power factor, 根号: square root sign, 自然数: natural number, 位相差: phase difference, 変圧器: transformer, 理想: ideal, 単位: unit, 皮相電力: apparent power, 有効電力: active (effective) power, 無効電力: reactive power

問題４.

図 4-1 に示す電圧 E の直流電圧源，抵抗値 R_1 および R_2 の抵抗，静電容量 C のキャパシタおよびスイッチ S_1, S_2 が接続された回路について考える。初期状態ではスイッチ S_1, S_2 は開いているとし，キャパシタには電荷 $Q > 0$ がたまっているとする（$Q < CE$）。ここで，キャパシタの電圧が正（$v_C(t) > 0$）のときキャパシタにたまっている電荷 $q(t)$ は正（$q(t) > 0$）であるとし，キャパシタに流れ込む電流を $i(t)$ とする。このとき，以下の問 1 から問 6 に答えなさい。なお，解答欄には解答のみを記入しなさい。また，問 2, 問 4, 問 5, 問 6 については E, Q, R_1, R_2, C, t のうち必要なものを用いて解答しなさい。

問 1.　時刻 $t = 0$ でスイッチ S_1 を閉じた。このとき，キャパシタの電荷 $q(t)$ についての微分方程式を示しなさい。また，$q(t)$ の初期値 $q(0)$ を答えなさい。

問 2.　問 1 で示した微分方程式を解いて $q(t)$, $i(t)$ を求めなさい。

問 3.　問 1 でスイッチ S_1 を閉じてから十分に時間が経過した後，スイッチ S_1 を開くと同時にスイッチ S_2 を閉じた。この時刻を改めて $t = 0$ としたとき，キャパシタの電荷 $q(t)$ についての微分方程式を示しなさい。また，$q(t)$ の初期値 $q(0)$ を答えなさい。

問 4.　問 3 で示した微分方程式を解いて $q(t)$, $i(t)$ を求めなさい。

問 5.　問 3 のスイッチ操作からある時刻 T が経過したとき（$t = T$），キャパシタが蓄えているエネルギーが $t = 0$ のときの半分となった。この T を求めなさい。

問 6.　問 3 のスイッチ操作から十分に時間が経過するまでに，抵抗 R_1 および R_2 で消費されたエネルギーをそれぞれ求めなさい。

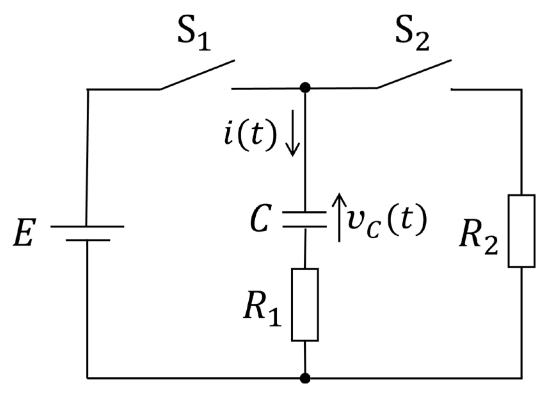

図 4-1

電圧: voltage, 直流電圧源: DC voltage source, 抵抗値: resistance, 抵抗: resistor, 静電容量: capacitance, キャパシタ: capacitor, スイッチ: switch, 回路: circuit, 初期状態: initial state, 開いている: opened, 電荷: electric charge, たまっている: charged, 正: positive, 電流: current, 閉じた: closed, 微分方程式: differential equation, 初期値: initial value, 蓄えている: stored, エネルギー: energy

問題５.

問１． 図 5-1 のように，真空中に点 O を中心に，半径 a の内球①と，内半径および外半径がそれぞれ $2a, 3a$ の外球殻②からなる同心球導体がある。真空の誘電率をε_0とする。外球に正電荷 Q を与え，内球を接地した場合，以下の問いに答えなさい。解答欄には解答のみを記入しなさい。

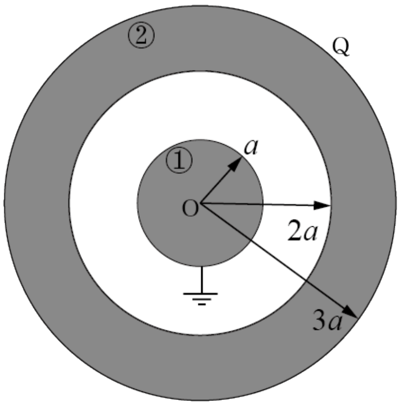

図 5-1

(1) 内球①の電位を求めなさい。

(2) 内球①に生じた誘導電荷を求めなさい。

(3) 半径 r での電界の大きさを求めなさい。($r > 3a$)

(4) 外球②の電位を求めなさい。

(5) 半径 r での電位を求めなさい。($a < r < 2a$)

問 2.　図 5-2 のように，真空中に点 O を中心に，半径 a の内球①と内径 $3a$ の外球殻の同心導体球が置かれている。同心球体の間に誘電率 ε_1 の誘電体を半径 $2a$ まで，誘電率 ε_2 の誘電体を半径 $3a$ まで詰めた。あらかじめ内球①に正電荷 Q を与えてある。また，外球殻②の厚さがその半径に比べて十分に小さい。以下の問いに答えなさい。解答欄には解答のみを記入しなさい。

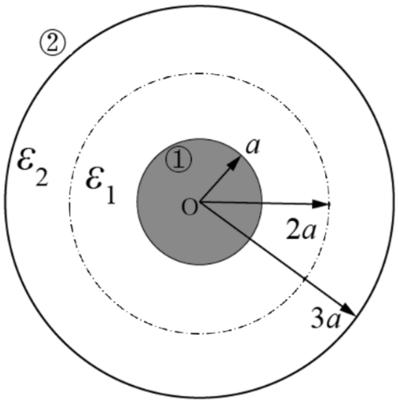

図 5-2

(1)　内球と外球殻の間の静電容量を求めなさい。

(2)　蓄えられた総静電エネルギーを求めなさい。

(3)　誘電体境界面に働く力の大きさを求めなさい。

真空: vacuum, 半径: radius, 導体: conductor, 誘電率: permittivity, 正電荷: positive charge, 電位: potential, 誘電体: dielectric, 静電容量: capacitance, 境界: boundary, 力: force

問題6.

　次の各問いに答えなさい。解答は，問 4 以外は結果のみを解答用紙の所定欄に記入すること。

図 6-1 のように z 軸を上向きにとり，$z \geq 0$の領域には誘電率 ε の物質がある。$z < 0$の領域は真空であり，誘電率と透磁率はそれぞれ ε_0 と μ_0 である。また，物質の透磁率は真空の透磁率と同じ μ_0 とする。いま，電磁波がz軸の負の方向から正の方向に向かって，真空と物質の境界面$(z = 0)$に対して垂直に入射する場合を考える。電磁波の一部は境界面で反射し，残りは物質中に透過する。ただし，真空中および物質中とそれらの境界面には自由電荷および電流はないものとする。入射波の電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{I}(\boldsymbol{r}, t)$，透過波の電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{T}(\boldsymbol{r}, t)$ および入射波の磁束密度 $\boldsymbol{B}_\mathrm{I}(\boldsymbol{r}, t)$ は，次のように書き表すことができる。

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{I}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{0\mathrm{I}}\exp\{i(\boldsymbol{k}_\mathrm{I}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_\mathrm{I}t)\}$$
$$\boldsymbol{E}_\mathrm{T}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{0\mathrm{T}}\exp\{i(\boldsymbol{k}_\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_\mathrm{T}t)\}$$
$$\boldsymbol{B}_\mathrm{I}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_{0\mathrm{I}}\exp\{i(\boldsymbol{k}_\mathrm{I}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_\mathrm{I}t)\}$$

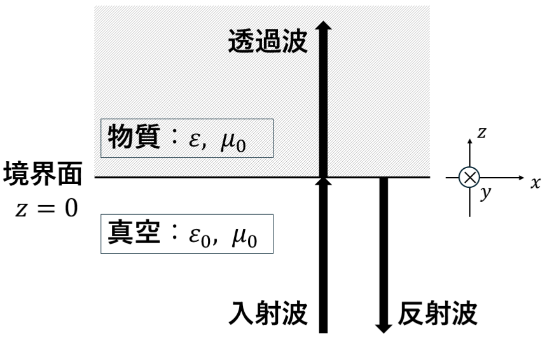

図 6-1

ここで，$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$ は位置ベクトル，t は時間を表す。
$\boldsymbol{E}_{0\mathrm{I}} = (E_{\mathrm{Ix}},\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{E}_{0\mathrm{T}} = (E_{\mathrm{Tx}},\ 0,\ 0)$ はそれぞれ入射波および透過波の電界の振幅である。$\boldsymbol{k}_\mathrm{I} = (0,\ 0, k_{\mathrm{Iz}})$，$\boldsymbol{k}_\mathrm{T} = (0,\ 0, k_{\mathrm{Tz}})$ はそれぞれ入射波および透過波の波数，i は虚数単位を表す。ω_I，ω_T はそれぞれ入射波と透過波の角周波数であり，いずれも定数である。また E_{Ix}，E_{Tx}，k_{Iz}, k_{Tz} も定数である。

問 1.　反射波の電界の振幅を $\boldsymbol{E}_{0\mathrm{R}} = (E_{\mathrm{Rx}},\ 0,\ 0)$ とするとき，反射波の電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{R}(\boldsymbol{r},\ t)$ を $\boldsymbol{E}_{0\mathrm{R}}$, i, $\boldsymbol{k}_\mathrm{I}$, $\boldsymbol{r}$, ω_I, t, ε_0, ε, μ_0 の中から必要なものを使って求めなさい。

問 2.　入射波の磁束密度の振幅 $\boldsymbol{B}_{0\mathrm{I}}$ を $\boldsymbol{E}_{0\mathrm{I}}$, i, $\boldsymbol{k}_\mathrm{I}$, $\boldsymbol{r}$, ω_I, t, ε_0, ε, μ_0 の中から必要なものを使って表しなさい。

問 3.　任意のベクトル関数 $\boldsymbol{F}$ に対するベクトル公式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$ を使って，入射波の電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{I}(\boldsymbol{r}, t)$ に関する波動方程式を導出しなさい。

問 4.　入射波の電界は縦波か横波か，その理由をガウスの法則に基づいて説明しなさい。

問 5.　入射波の伝搬速度 v_{IN} および透過波の伝搬速度 v_{TR} を求めなさい。

問 6.　境界面$(z = 0)$で電界と磁界が満たす条件を考慮して，E_{Ix}，E_{Rx}，E_{Tx} の間に成り立つ 2 つの関係式を ε_0, ε, μ_0 の中から必要なものを使って導きなさい。

問 7.　境界面$(z = 0)$における反射率 R および透過率 T は，それぞれ入射波のエネルギー

流に対する反射波および透過波のエネルギー流の比として定義される。すなわち，入射波，反射波，透過波のポインティングベクトルの時間平均をそれぞれ $\overline{\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}, t)}$, $\overline{\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}, t)}$, $\overline{\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}, t)}$ とすると，反射率 R および透過率 T は，

$$R = \left| \frac{\overline{\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}, t)}}{\overline{\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}, t)}} \right|$$

$$T = \left| \frac{\overline{\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}, t)}}{\overline{\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}, t)}} \right|$$

から求めることができる。ε_0, μ_0, ε のうち必要なものを使って，反射率 R および透過率 T を求めなさい。

誘電率 : permittivity，物質 : substance，真空 : vacuum，透磁率 : permeability，電磁波 : electromagnetic waves，境界面 : boundary，入射 : incidence，反射 : reflection，透過 : transmission，自由電荷: free charge，電流: current，電界: electric field，磁束密度: magnetic flux density，位置ベクトル: position vector，振幅: amplitude，虚数単位: imaginary unit，波数: wave number，角周波数: angular frequency，定数: constant，縦波: longitudinal wave，横波: transverse wave，ガウスの法則: Gauss's law，ベクトル関数: vector function，伝搬速度: propagation velocity，ベクトル公式: vector formula，波動方程式: wave equation，関係式: relational expression，反射率: reflectance，透過率: transmittance，エネルギー流: energy flow，比: ratio，ポインティングベクトル: Poynting vector，時間平均: time average